



北京专版

全品高考

第三轮专题

主编：肖德好

数学 新高考 听课手册

???

第一、二、三次模拟考试上出现的知识点——第二次模拟考试（查漏补缺）

使 $f(x) > 0$ 恒成立的充要条件是：使 $f(x) < 0$ 恒成立的充要条件是

$f(x) = 0$ ，则 $f(x)$ 恒正（正）恒负（负），则 x_1, x_2 恒正（大）恒负

可求最值：求函数在闭区间、开区间上的最大值、最小值

恒成立问题：求函数在闭区间、开区间上的最大值、最小值

$y = f(x)$ 恒成立，求得 $y = f(x) + A$ 恒成立， $A > 0$ 恒上， $A < 0$ 恒下

二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 恒成立

二次不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 恒成立

The Second Round Project

$y = f(x)$ 恒成立，求得 $y = f(x) + A$ 恒成立， $A > 0$ 恒上， $A < 0$ 恒下

恒成立问题：求函数在闭区间、开区间上的最大值、最小值

全品高考第二轮专题 数学

高三考生

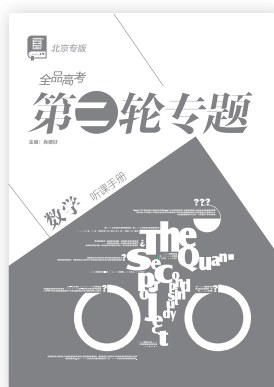
透析命题 聚焦答卷

理想的高考成绩

二轮复习

考试多，时间紧
题量大，做不完？

《全品高考第二轮专题》—— **精 准 透**



6大模块统领二轮复习
4个综合实现高考进阶
2页作业限时限量
4个技能专题突破高分
全解全析，方便使用

二轮复习 有的放矢

跳出题海 精准备考

只做真正的**北京专版**

精选试题，特别关注北京高考试卷结构
知识点命题特点、知识点之间的联系
题干特点、选项特点
设问特点、答题特点
... ..



必记公式，提警易错点
考前查漏补缺
知识回顾，强化要点
突出考查重点

考前梳理 巩固要点

抓住阅卷人眼睛

1. 数学符号答题。 2. 逻辑清晰，必要的文字说明，条件完整。
3. 字迹清晰整齐，书写规范，注意错别字。

01 高考专题讲练

• 思想篇	数学思想方法的应用	001
• 方法篇	选填题的特殊解法	005
• 自习篇	集合、复数、常用逻辑用语、不等式的性质与基本不等式、统计	008

高考六大模块题型解法攻略

模块一 函数、不等式与导数

微专题 1	函数的图象与性质	012
-------	----------------	-----

微专题 2	导数的基本应用	016
-------	---------------	-----

 高分提能一	几类常考函数的综合问题	019
---	-------------------	-----

类型一 分段函数

类型二 新定义函数

类型三 抽象函数

微专题 3	函数零点	022
-------	------------	-----

微专题 4	导数中的恒成立、存在性问题	025
-------	---------------------	-----

高考进阶 1	必要性探路与充分性证明解决求参问题	028
---------------	-------------------------	-----

微专题 5	构造函数证明不等式	029
-------	-----------------	-----

 高分提能二	隐零点问题	032
---	-------------	-----

模块二 三角函数、平面向量与解三角形

微专题 6	三角函数的图象与性质、三角恒等变换	034
-------	-------------------------	-----

微专题 7	平面向量	036
-------	------------	-----

微专题 8	解三角形	038
II	高分提能三 解多三角形问题	041
	类型一 中线	
	类型二 角平分线	
	类型三 四边形	

模块三 数列

微专题 9	等差数列、等比数列	045
微专题 10	数列综合问题	048
微专题 11	数列创新问题	050

模块四 立体几何

微专题 12	空间几何体	054
高考进阶 2	立体几何中的综合问题	056
	综合一 翻折问题	
	综合二 动态问题	
微专题 13	立体几何	058

模块五 解析几何

微专题 14	直线与圆	063
高考进阶 3	隐圆问题	065
微专题 15	圆锥曲线的标准方程与几何性质	066
高考进阶 4	坐标系内的曲线的图形与性质的研究	069
微专题 16	圆锥曲线的热点问题(一) 斜率、长度、面积问题	070
微专题 17	圆锥曲线的热点问题(二) 最值范围、共点、共线问题	074
微专题 18	圆锥曲线的热点问题(三) 定点、定值、定直线问题	077

模块六 统计与概率

微专题 19	计数原理	080
微专题 20	随机变量及其分布	081
II 高分提能四	统计、概率中的推断问题	086
类型一	统计推断问题	
类型二	概率决策推断	

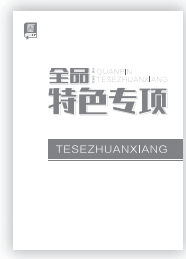
参考答案（另附分册） / 092

02 考前知识清单（另附分册）



- 教材再现
- 易错提醒
- 必记公式

03 特色专项（另附分册）



- 贴近真题特点
 - 分类强化训练
 - 考查内容全面
- The part one
第一部分 小题快练
精选模拟题练习，提升高考体验
- The part two
第二部分 大题冲关
加强答题规范性，有效快捷提分

思想一 函数与方程思想

函数思想就是用运动和变化的观点,分析和研究数学中的数量关系,是对函数概念本质的认识,建立函数关系或构造函数,运用函数的图象和性质去分析问题、转化问题,从而使问题获得解决.如求数列中的项或最值、求解三角形最值范围问题、求不等式中的参数、求解析几何中距离或面积的最值等相关的非函数问题,往往都可利用函数思想转化为函数问题.

方程思想就是分析数学问题中变量间的等量关系,建立方程或方程组,或者构造方程,通过解方程或方程组,或者运用方程的性质去分析问题、转化和解决问题.如变量的取值范围、直线与圆锥曲线的位置关系、数列中的基本量、二项式系数等问题.

真题示例

1. [2024·新课标I卷] 已知向量 $\mathbf{a} = (0, 1)$, $\mathbf{b} = (2, x)$, 若 $\mathbf{b} \perp (\mathbf{b} - 4\mathbf{a})$, 则 $x =$ ()
- A. -2 B. -1
- C. 1 D. 2

[解法关键]

根据向量数量积为 0, 建立关于参数 x 的方程.
答案:D.

2. [2022·新高考全国I卷] 已知正四棱锥的侧棱长为 l , 其各顶点都在同一球面上, 若该球的体积为 36π , 且 $3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$, 则该正四棱锥体积的取值范围是 ()
- A. $\left[18, \frac{81}{4}\right]$ B. $\left[\frac{27}{4}, \frac{81}{4}\right]$
- C. $\left[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}\right]$ D. $[18, 27]$

[解法关键]

画出图形, 由题意可求出球的半径 $R=3$, 设正四棱锥的底面边长为 a , 高为 h , 由射影定理求得 l 与 h 的关系, 由 l 的取值范围求出 h 的取值范围, 又 $a^2 = 12h - 2h^2$, 得到正四棱锥的体积 $V(h) = -\frac{2}{3}h^3 + 4h^2$, 利用导数即可求出 $V(h)$ 的取值范围. 答案:C.

3. [2024·北京卷] 汉代刘歆设计的“铜嘉量”是龠、合、升、斗、斛五量合一的标准量器, 其中升量器、斗量器、斛量器的形状均可视为圆柱. 若升、斗、斛量器的容积成公比为 10 的等比数列, 底面直径依次为 65 mm, 325 mm, 325 mm, 且斛

量器的高为 230 mm, 则斗量器的高为 _____ mm, 升量器的高为 _____ mm.

[解法关键]

根据容积成公比为 10 的等比数列可得关于高度的方程组, 求出其解后可得两个圆柱的高度. 答案: $23, \frac{115}{2}$.

自测题

1. [2024·人大附中三模] 若双曲线 $C_1: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ 与 $C_2: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 具有相同的渐近线, 则 C_2 的离心率为 ()
- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $\sqrt{2}$
- C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$
2. [2023·东城二模] 设 $a = e^{0.01}$, $b = 1.01$, $c = \ln 1.01$, 其中 e 为自然对数的底数, 则 ()
- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$
- C. $b > c > a$ D. $a > c > b$
3. 已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = 2$, 且 $(\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) \perp \mathbf{b}$, 则 $|\mathbf{b}| =$ ()
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1
4. 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7 + a_8 + a_9 > 0$, $a_7 + a_{10} < 0$, 则当 $n =$ _____ 时, $\{a_n\}$ 的前 n 项和最大.

思想二 数形结合思想

数形结合是根据数量与图形之间的对应关系,通过数与形的相互转化来解决数学问题的一种重要思想方法.数形结合思想体现了数与形之间的转化,它包含“以形助数”和“以数解形”两个方面.数形结合的实质是把抽象的数学语言与直观的图形语言结合起来,即将代数问题几何化、几何问题代数化.

数形结合思想常用来解决函数零点、方程根与不等式问题,参数范围问题,以立体几何为模型的代数问题,解析几何中的斜率、截距、距离等问题.

真题示例

1. [2024·新课标I卷] 当 $x \in [0, 2\pi]$ 时, 曲线 $y = \sin x$ 与 $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为 ()
- A. 3 B. 4
C. 6 D. 8

[解法关键]

分别画出函数 $y = \sin x$ 和函数 $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图象, 由图可知, 两函数图象有 6 个交点.
答案: C.

2. [2022·北京卷] 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$. P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点, 且 $PC = 1$, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围是 ()
- A. $[-5, 3]$ B. $[-3, 5]$
C. $[-6, 4]$ D. $[-4, 6]$

[解法关键]

根据条件建立平面直角坐标系, 设 $P(x, y)$, 计算可得 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -3x - 4y + 1$, 进而可利用参数方程转化为三角函数的最值问题求解. 答案: D.

3. [2024·北京卷] 已知 $M = \{(x, y) | y = x + t(x^2 - x), 1 \leq x \leq 2, 0 \leq t \leq 1\}$ 是平面直角坐标系中的点集. 设 d 是 M 中两点间的距离的最大值, S 是 M 表示的图形的面积, 则 ()
- A. $d = 3, S < 1$ B. $d = 3, S > 1$
C. $d = \sqrt{10}, S < 1$ D. $d = \sqrt{10}, S > 1$

[解法关键]

先以 t 为变量, 分析可知所求集合表示的图形即为不等式组 $\begin{cases} y \leq x^2, \\ y \geq x, \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ 表示的平面区域, 结合图形分析求解即可. 答案: C.

自测题

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & 0 < x < 2, \\ 6 - x, & x \geq 2, \end{cases}$ 则不等式

$f(x) \geq \sqrt{x}$ 的解集为 ()

- A. $(0, 1]$ B. $(0, 2]$
C. $[1, 4]$ D. $[1, 6]$

2. 若点 P 是棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的表面上一个动点, 则下列说法中不正确的是 ()

- A. 当点 P 在平面 BCC_1B_1 上运动时, 四棱锥 $P - AA_1D_1D$ 的体积不变
B. 当点 P 在线段 AC 上运动时, D_1P 与 A_1C_1 所成角的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

- C. 若 F 是 A_1B_1 的中点, 当点 P 在底面 $ABCD$ 上运动时, 不存在点 P 满足 $PF \parallel$ 平面 B_1CD_1

- D. 若点 P 在底面 $ABCD$ 上运动, 则使直线 A_1P 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45° 的点 P 的轨迹为圆上的一段弧

3. [2024·昌平二模] 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} (\lambda > 0)$. 当 $\lambda = \frac{1}{3}$ 时, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PD} =$ _____; 当 $\lambda =$ _____ 时, $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{DP}$ 取得最大值.

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x \leq a, \\ -2x, & x > a. \end{cases}$

- ①若 $a = 0$, 则 $f(x)$ 的最大值为 _____;
②若 $f(x)$ 无最大值, 则实数 a 的取值范围是 _____.

思想三 分类讨论思想

分类讨论思想就是将一个复杂的数学问题分解成若干个简单的基础问题,通过对基础问题的解答解决原问题的思维策略,实质上就是“化整为零,各个击破,再积零为整”的策略.其研究的基本方向是“分”,但分类解决问题之后,还必须把它们整合在一起.使用分类讨论思想应明白这样几点:一是引起分类讨论的原因;二是分类讨论的原则,不重不漏,分类标准统一;三是明确分类讨论的步骤.

常见的分类讨论问题有以下几种:(1)由概念引起的分类讨论;(2)由性质、定理、公式的限制条件引起的分类讨论;(3)由数学运算引起的分类讨论;(4)由图形的不确定性引起的分类讨论;(5)由参数的变化引起的分类讨论.

真题示例

1. [2024·新课标Ⅱ卷] 设函数 $f(x) = (x+a)\ln(x+b)$, 若 $f(x) \geq 0$, 则 a^2+b^2 的最小值为 ()

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$
C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【解法关键】

方法一:由题意可知 $f(x)$ 的定义域为 $(-b, +\infty)$, 分类讨论 $-a$ 与 $-b, 1-b$ 的大小关系, 结合符号分析判断, 即可得 $b=a+1$, 代入可得最值.

方法二:根据对数函数的性质分析 $\ln(x+b)$ 的符号, 通过分类讨论进而可得 $x+a$ 的符号, 即可得 $b=a+1$, 代入可得最值. 答案:C.

2. [2024·全国甲卷] 有 6 个相同的球, 分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 从中无放回地随机取 3 次, 每次取 1 个球. 设 m 为前两次取出的球上数字的平均值, n 为取出的三个球上数字的平均值, 则 m 与 n 之差的绝对值不大于 $\frac{1}{2}$ 的概率为_____.

【解法关键】

根据排列可求样本点的总数, 设前两个球的号码为 a, b , 第三个球的号码为 c , 则 $a+b-3 \leq 2c \leq a+b+3$, 就 c 的不同取值分类讨论后可求随机事件的概率. 答案:

$\frac{7}{15}$.

3. [2022·北京卷] 设函数 $f(x) = \begin{cases} -ax+1, & x < a, \\ (x-2)^2, & x \geq a. \end{cases}$

若 $f(x)$ 存在最小值, 则 a 的一个取值为_____; a 的最大值为_____.

【解法关键】

对分段函数 $f(x)$ 的分界点进行分类讨论, 分类情况有 $a < 0, a = 0, 0 < a < 2, a = 2, a > 2$. 答案为: 0 (答案不唯一), 1.

自测题

1. 从高二年级的 5 名同学中选派 4 人作为志愿者分别承担 4 项不同的公益工作, 若其中甲、乙两人只能从事其中的 A, B 两项工作, 其余三人均能从事这 4 项工作, 则不同的选派方案共有 ()

A. 48 种 B. 12 种
C. 18 种 D. 36 种

2. [2024·西城模拟] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2+x, & -2 < x < 0, \\ -\sqrt{x}, & 0 \leq x < c, \end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值, 则 c 的最大值为 ()

A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

3. [2024·北京一零一中学三模] 若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 且 $a=2, b=3$, 则边 c 的长度可以为 ()

A. 2.5 B. 3
C. 4 D. $\sqrt{13}$

4. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} + (-1)^n a_n = 3n - 1$, 前 16 项和为 540, 则 $a_1 =$ _____.

思想四 转化与化归思想

转化与化归思想是指在研究解决数学问题时,采用某种手段将问题转化,使问题得以解决的一种思维策略,其核心是把复杂的问题化归为容易求解的问题,将较难的问题化归为较简单的问题,将未能解决的问题化归为已经解决的问题,简单说就是化“生”为“熟”.

常见的转化与化归思想的应用具体表现在:将抽象函数问题转化为具体函数问题,立体几何和解析几何中一般性点或图形问题转化为特殊点或特殊图形问题,“至少”或“是否存在”等正向思维受阻问题转化为逆向思维,空间与平面的转化,相等问题与不等问题的转化等.

真题示例

1. [2021·北京卷] 函数 $f(x)=\cos x-\cos 2x$ 是 ()

- A. 奇函数,且最大值为 2
B. 偶函数,且最大值为 2
C. 奇函数,且最大值为 $\frac{9}{8}$
D. 偶函数,且最大值为 $\frac{9}{8}$

[解法关键]

利用定义判断奇偶性,利用二倍角余弦公式,将函数转化为关于 $\cos x$ 的二次函数形式,从而确定最大值.
答案:D.

2. [2023·北京卷] 在 $\triangle ABC$ 中, $(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$, 则 $\angle C=$ ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$
C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

[解法关键]

先利用正弦定理将条件中的边角关系式转化为边的关系式,再利用余弦定理求角. 答案:B.

3. [2024·北京卷] 若直线 $y=k(x-3)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 只有一个公共点, 则 k 的一个取值为_____.

[解法关键]

联立直线与双曲线的方程,化简整理得关于 x 的方程,再分类讨论,并结合判别式,可得 k 的取值. 答案:

$\frac{1}{2}$ (或 $-\frac{1}{2}$).

自测题

1. 已知 α, β 为锐角, 且 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{2\sin\beta}{\sin\alpha}$, 则 $\tan\beta$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{12}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$
C. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. [2024·北师大附属实验中学考前模拟] 已知直线 $l: x+y-2\sqrt{2}=0$, 圆 $\Gamma: x^2+y^2=r^2 (r>0)$, 若直线 l 上存在两点 A, B , 圆 Γ 上存在点 C , 使得 $|AB|=2$, 且 $\angle ACB=90^\circ$, 则 r 的取值范围是 ()

- A. $[1, 3]$ B. $[2, 3]$
C. $[1, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$

3. [2024·通州二模] 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x|x|-1, & x\leq 1, \\ \log_2 x+1, & x>1, \end{cases} g(x)=x\ln x$, 若关于 x 的方程 $[f(x)-2][g(x)-m]=0$ 恰有 3 个不同的实数根, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\frac{1}{e}, 0)$
B. $(-\frac{1}{e}, 1)$
C. $(0, +\infty)$
D. $(1, +\infty)$

4. 若 $x>0, y>0$, 且 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$, 则 $2x+y$ 的最大值为_____.

方法一 特殊法

在解决选择题和填空题时,可以取一个(或一些)特殊数值(或特殊位置、特殊函数、特殊点、特殊方程、特殊数列、特殊图形等)来确定其结果,这种方法称为特值法.特值法只需对特殊数值、特殊情形进行检验,省去了推理论证、烦琐演算的过程,提高了解题的速度.特例法是考试中解答选择题和填空题时经常用到的一种方法,应用得当可以起到“四两拨千斤”的功效.

(1)使用前提:满足当一般性结论成立时,对符合条件的特殊化情况也一定成立.

(2)使用技巧:找到满足条件的合适的特殊化例子,或举反例排除,有时甚至需要两次或两次以上特殊化例子才可以确定结论.

(3)常见问题:求范围、比较大小、含字母求值、恒成立问题、任意性问题等.

真题示例

1. [2024·全国甲卷] 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,若 $S_9=1$,则 $a_3+a_7=$ ()
- A. -2 B. $\frac{7}{3}$ C. 1 D. $\frac{2}{9}$

[解法关键]

本题除了利用等差数列的基本量方法,利用等差数列的性质求解外,采用特例法求解非常快捷.不妨取等差数列的公差 $d=0$,则 $S_9=1=9a_1$,可得 $a_1=\frac{1}{9}$,则

$$a_3+a_7=2a_1=\frac{2}{9}. \text{ 答案:D.}$$

2. [2024·新课标II卷] 已知曲线 $C:x^2+y^2=16$ ($y>0$),从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线 PP' , P' 为垂足,则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为 ()
- A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ ($y>0$) B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$ ($y>0$)
- C. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$ ($y>0$) D. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{8}=1$ ($y>0$)

[解法关键]

在曲线 C 上取一点 $(0,4)$,向 x 轴作垂线段,中点坐标为 $(0,2)$,代入各选项中,只有A符合. 答案:A.

3. [2024·北京卷] 已知 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 是函数 $y=2^x$ 的图象上两个不同的点,则 ()
- A. $\log_2 \frac{y_1+y_2}{2} < \frac{x_1+x_2}{2}$
- B. $\log_2 \frac{y_1+y_2}{2} > \frac{x_1+x_2}{2}$
- C. $\log_2 \frac{y_1+y_2}{2} < x_1+x_2$
- D. $\log_2 \frac{y_1+y_2}{2} > x_1+x_2$

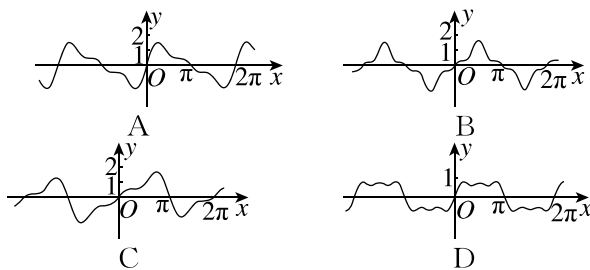
[解法关键]

根据指数函数和对数函数的单调性结合基本不等式分析判断 A,B;举例判断 C,D,对于选项 C,例如 $x_1=-2, x_2=-1$,则 $y_1=\frac{1}{4}, y_2=\frac{1}{2}$;对于选项 D,例如 $x_1=0, x_2=1$,则 $y_1=1, y_2=2$. 答案:B.

自测题

1. [2024·延庆一模] 已知函数 $f(x)=3^x-2x-1$,则不等式 $f(x)<0$ 的解集是 ()
- A. $(0,1)$
- B. $(0,+\infty)$
- C. $(-\infty,0)$
- D. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

2. 函数 $f(x)=\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5}$ 的图象可能是 ()



3. [2024·海淀二模] 设 $a, b \in \mathbf{R}, ab \neq 0$,且 $a>b$,则 ()
- A. $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$
- B. $\left| \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right| > 2$
- C. $\sin(a-b) < a-b$
- D. $3^a > 2^b$
4. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$,对于任意正整数 m, n ,都满足 $a_{m+n}=a_m+a_n+mn$,则 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2025}} =$ _____.

方法二 验证法

验证法是将选项或特殊值代入题干逐一去验证是否满足题目条件,然后选择符合题目条件的选项的一种方法.在运用验证法解题时,若能根据题意确定代入顺序,则能提高解题速度.

(1)使用前提:各选项可分别作为条件.

(2)使用技巧:可以结合特值法、排除法等先否定一些明显错误的选项,再选择直觉认为最有可能的选项进行验证,这样可以快速获得答案.

(3)常见问题:题干信息不全、选项是数值或范围、正面求解或计算烦琐的问题等.

真题示例

1. [2023·北京卷] 下列函数中,在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()

A. $f(x) = -\ln x$ B. $f(x) = \frac{1}{2^x}$
C. $f(x) = -\frac{1}{x}$ D. $f(x) = 3^{|x-1|}$

[解法关键]

利用基本初等函数的单调性,结合复合函数的单调性对各选项逐一验证.答案:C.

2. [2021·北京卷] 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为2,且过点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$,则双曲线的方程为 ()

A. $2x^2 - y^2 = 1$ B. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$
C. $5x^2 - 3y^2 = 1$ D. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$

[解法关键]

利用各选项的 a, c 值验证离心率2,发现A, C错误,利用经过的点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 验证D错误.答案:B.

3. [2023·新课标II卷] 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x$ 在区间 $(1, 2)$ 单调递增,则 a 的最小值为 ()

A. e^2 B. e C. e^{-1} D. e^{-2}

[解法关键]

$f'(x) = ae^x - \frac{1}{x}$,当 a 的值取A, B, C中的值时,
 $f'(x) \geq 0$ 在 $(1, 2)$ 上恒成立,当 a 的值取 e^{-2} 时,
 $f'(x) \geq 0$ 在 $(1, 2)$ 上不恒成立,故最小值为C中的值.
答案:C.

自测题

1. [2024·通州二模] 下列函数中,是奇函数且在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的是 ()

A. $f(x) = \frac{1}{x+1}$
B. $f(x) = -x^3$
C. $f(x) = \tan x$
D. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x|$

2. 在数列 $\{a_n\}$ 中,若 $\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} + \sqrt{2}$, $a_1 = 8$,则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ()

A. $a_n = 2(n+1)^2$
B. $a_n = 4(n+1)$
C. $a_n = 8n^2$
D. $a_n = 4n(n+1)$

3. 已知函数 $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot (e^{x-1} + e^{1-x})$,则满足不等式 $f(2x) < f(4)$ 的 x 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, 2)$
B. $(-1, 2)$
C. $(2, +\infty)$
D. $(1, 2)$

4. [2024·人大附中三模] 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$ 且 $a_{n+1} = S_n^2 + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$,给出下列四个结论:①长度分别为1, a_{n+1} , S_n 的三条线段可以构成一个直角三角形;② $\forall n \in \mathbf{N}^*, S_n \geq 2^{n-1}$;③ $\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n + a_{n+2} < 2a_{n+1}$;④ $\forall n \in \mathbf{N}^*, a_{n+1} = 2a_n \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$.其中所有正确结论的序号是_____.

方法三 构造法

构造法是一种创造性的解题方法,它很好地体现了数学中的发散、类比、转化思想,是指根据题设条件和结论的特征、性质,运用已知数学关系式和理论,构造出满足条件或结论的数学对象,从而使原问题中隐含的关系和性质在新构造的数学对象中清晰地展现出来,并借助该数学对象方便快捷地解决数学问题的方法.构造法应用的技巧是“定目标构造”,需从已知条件入手,紧扣要解决的问题,把陌生的问题转化为熟悉的问题,解题时常构造函数、方程、几何图形等.

(1)使用前提:所构造的函数、方程、几何图形等要合理,不能超出原题的限制条件.

(2)使用技巧:对于不等式、方程、函数问题常采用构造新函数,对于不规则的几何体常构造规则几何体处理.

(3)常见问题:比较大小、函数导数问题、不规则的几何体问题等.

真题示例

1. [2022·新高考全国I卷] 设 $a = 0.1e^{0.1}$, $b = \frac{1}{9}$,

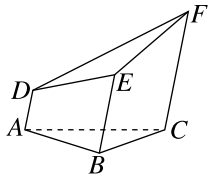
$c = -\ln 0.9$, 则 ()

- A. $a < b < c$
B. $c < b < a$
C. $c < a < b$
D. $a < c < b$

[解法关键]

构造函数 $f(x) = (1-x)e^x$ ($0 < x < 1$) 和 $g(x) = xe^x + \ln(1-x)$ ($0 < x \leq 0.1$), 利用导数性质求出 $a < b$ 和 $a > c$, 由此能求出结果. 答案: C.

2. [2024·天津卷] 一个五面体 $ABC-DEF$ 如图所示, 已知 $AD \parallel BE \parallel CF$, 且两两之间的距离为 1, 并已知 $AD = 1$, $BE = 2$, $CF = 3$, 则该五面体的体积为 ()



- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}$

[解法关键]

采用补形法将五面体 $ABC-DEF$ 补成一个三棱柱, 再利用体积公式即可. 答案: C.

3. [2024·全国甲卷] 曲线 $y = x^3 - 3x$ 与 $y = -(x-1)^2 + a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的交点, 则 a 的取值范围为_____.

[解法关键]

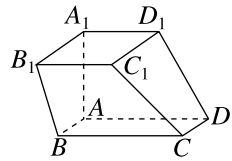
将函数转化为方程, 令 $x^3 - 3x = -(x-1)^2 + a$, 分离参数 a , 构造新函数 $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 1$ ($x > 0$), 结合导数求得 $g(x)$ 的单调区间, 画出 $y = g(x)$ 的大致图象, 数形结合即可求解. 答案: $(-2, 1)$.

自测题

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, 则 $a_4 =$ ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{7}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{9}{5}$

2. 如图, 在六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 $ABCD \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是两个全等的矩形, $AB \parallel A_1B_1$, $AD \parallel A_1D_1$, $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $AB = B_1C_1 = 6$, $BC = A_1B_1 = 10$, $AA_1 = 6$, 则六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 ()



- A. 288 B. 376
C. 448 D. 600

3. [2024·朝阳二模] 已知 n 个大于 2 的实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 对任意 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 存在 $y_i \geq 2$ 满足 $y_i < x_i$ 且 $x_i^{y_i} = y_i^{x_i}$, 则使得 $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \leq 15x_n$ 成立的最大正整数 n 为 ()
- A. 14 B. 16
C. 21 D. 23



集合、复数、常用逻辑用语、不等式的性质与基本不等式、统计

自习一 集合

1. [2024·北京卷] 已知集合 $M=\{x|-3<x<1\}$, $N=\{x|-1\leq x<4\}$, 则 $M\cup N=$ ()
A. $\{x|-1\leq x<1\}$ B. $\{x|x>-3\}$
C. $\{x|-3<x<4\}$ D. $\{x|x<4\}$
2. [2024·昌平二模] 已知集合 $A=\{-1,0,1,2,3\}$, $B=\{x|x^2-2x>0\}$, 则 $A\cap B=$ ()
A. $\{0,1,2\}$ B. $\{1\}$
C. $\{-1,0,1,2\}$ D. $\{-1,3\}$
3. 集合 $A=\{x|x\leq a\}$, $B=\{x|x^2-5x<0\}$, 若 $B\subseteq A$, 则 a 的取值范围是 ()
A. $a>0$ B. $a\geq 0$
C. $a>5$ D. $a\geq 5$
4. [2024·西城一模] 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x|x<3\}$, $B=\{x|-2\leq x\leq 2\}$, 则 $A\cap(\complement_U B)=$ ()
A. $(2,3)$ B. $(-\infty,-2)\cup(2,3)$
C. $[2,3)$ D. $(-\infty,-2]\cup[2,3)$

【技巧点拨】

解决集合问题时要注意以下几点:(1)集合中元素的互异性;(2)不能忽略空集;(3)要注意端点的取值;(4)对于描述法表示的集合,要注意代表元素的意义.

自习二 复数

1. [2023·北京卷] 在复平面内,复数 z 对应的点的坐标是 $(-1,\sqrt{3})$, 则 z 的共轭复数 $\bar{z}=$ ()
A. $1+\sqrt{3}i$ B. $1-\sqrt{3}i$
C. $-1+\sqrt{3}i$ D. $-1-\sqrt{3}i$
2. [2022·北京卷] 若复数 z 满足 $i\cdot z=3-4i$, 则 $|z|=$ ()
A. 1 B. 5
C. 7 D. 25
3. [2024·顺义二模] 已知复数 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 满足 $(1+i)\cdot\bar{z}=2i$, 则 $z\cdot\bar{z}=$ ()
A. $\sqrt{2}$ B. 1
C. 2 D. 4
4. [2023·丰台一模] 若复数 $\frac{a+i}{1+i}$ ($a\in\mathbf{R}$) 是纯虚数, 则 $a=$ _____.
5. [2024·东城二模] 若复数 z 满足 $\frac{z}{1+i}=2+i$, 则 z 在复平面内对应的点的坐标是 _____.

【技巧点拨】

(1)复数运算的重点是除法运算,其关键是进行分母实数化;(2)利用复数相等 $a+bi=c+di$ 求解时,要注意 a,b,c,d 为实数的前提条件.

自习三 常用逻辑用语

1. [2023·北京卷] 若 $xy \neq 0$, 则“ $x+y=0$ ”是“ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ ”的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
2. [2024·东城二模] 已知平面向量 e_1, e_2, e_3, e_4 是单位向量, 且 $e_1 \perp e_2$, 则“ $e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_4$ ”是“ $e_3 \cdot e_4 = 0$ ”的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 已知空间中不过同一点的三条直线 l, m, n , “ l, m, n 共面”是“ l, m, n 两两相交”的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. [2024·丰台二模] 已知等差数列 $\{\alpha_n\}$ 的公差为 d , 首项 $\alpha_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则“ $d = \pi$ ”是“集合 $S = \{x \mid x = \sin \alpha_n, n \in \mathbf{N}^*\}$ 恰有两个元素”的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. [2023·房山一模] 能够说明“设 a, b, c 是任意实数, 若 $a < b < c$, 则 $ac < bc$ ”是假命题的一组整数 a, b, c 的值依次为_____.

【技巧点拨】

若 $p \Rightarrow q$, 则 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件, 要注意推理的方向, 难点还是在于与之相关知识的考查. 另外要注意“ A 是 B 的充分条件”与“ B 是 A 的充分条件”是不同的概念.

自习四 不等式的性质与基本不等式

1. [2024·丰台二模] 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a > b$, 则 ()
- A. $\frac{1}{a^2+1} < \frac{1}{b^2+1}$ B. $a^2b > ab^2$
C. $a^2 > ab > b^2$ D. $a > \frac{a+b}{2} > b$
2. 若 $a > 0, b > 0$, 且 $ab = a + b + 3$, 则 ab 的最小值为 ()
- A. 1 B. 3
C. 9 D. 10
3. [2024·人大附中模拟] 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 且 $x > y$, 则 ()
- A. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} < 0$
B. $\tan x - \tan y > 0$
C. $(\frac{1}{e})^x - (\frac{1}{e})^y < 0$
D. $\ln |x| - \ln |y| > 0$

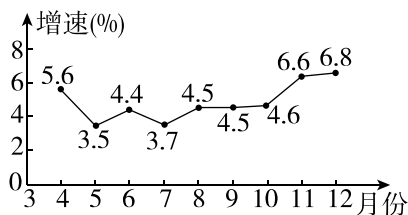
4. 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $\frac{8}{x} + \frac{2}{y} = 2$, 则 $x + y$ 的最小值是 _____.
- A. 9 B. 12
C. 15 D. 18
5. 已知 $a > 1$, 则 $a + \frac{4}{a-1}$ 的最小值为_____.

【技巧点拨】

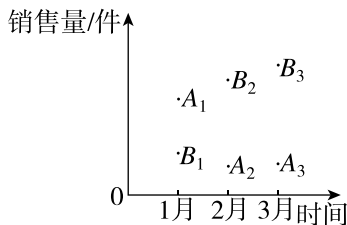
(1)要准确使用不等式的有关性质;(2)合理举出一些反例进行排除论证;(3)不要忽略使用基本不等式时的条件;(4)当多次使用基本不等式时,要注意等号是否同时成立.

自习五 统计

1. 某学校有高中学生 1500 人,初中学生 1000 人. 学生社团创办文创店,想了解初高中学生对学校吉祥物设计的需求,用比例分配的分层随机抽样的方法随机抽取若干人进行问卷调查. 已知在初中学生中随机抽取了 100 人,则在高中学生中随机抽取了 ()
- A. 150 人 B. 200 人
C. 250 人 D. 300 人
2. 近年来,我国国民经济运行总体稳定,延续回升向好态势. 如图是我国 2023 年 4 月到 2023 年 12 月规模以上工业增加值同比增长速度(以下简称增速)统计图.
- 注:规模以上工业指年主营业务收入 2000 万元及以上的工业企业.

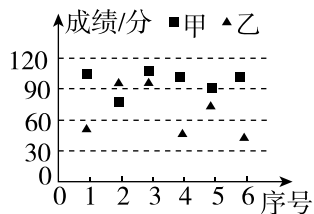


- 下列说法正确的是 ()
- A. 4月、5月、6月这三个月增速的方差比4月、5月、6月、7月这四个月增速的方差大
- B. 4月、5月、6月这三个月增速的平均数比4月、5月、6月、7月这四个月增速的平均数小
- C. 连续三个月增速的方差最大的是9月、10月、11月这三个月
- D. 连续三个月增速的平均数最大的是9月、10月、11月这三个月
3. 如图为某商铺A,B两种商品在2024年前3个月的销售情况统计图,已知A商品卖出一件盈利20元,B商品卖出一件盈利10元.图中点 A_1, A_2, A_3 的纵坐标分别表示A商品2024年前3个月的销售量,点 B_1, B_2, B_3 的纵坐标分别表示B商品2024年前3个月的销售量.根据图中信息,下列四个结论中正确的是 ()

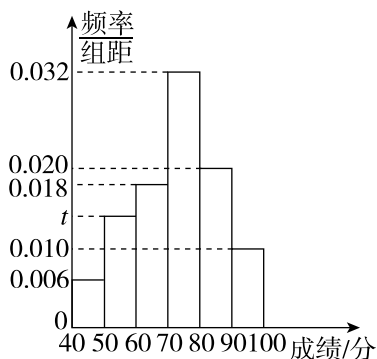


- ①2月A,B两种商品的总销售量最多;②3月A,B两种商品的总销售量最多;
③1月A,B两种商品的总盈利最多;④2月A,B两种商品的总盈利最多.
- A. ①③
B. ①④
C. ②③
D. ②④

4. [2024·首师大附中模拟] 已知甲、乙两名同学 6 次数学测试的成绩(单位:分)统计如图,则下列说法不正确的是 ()



- A. 甲成绩的极差小于乙成绩的极差
 B. 甲成绩的中位数小于乙成绩的第 75 百分位数
 C. 甲成绩的平均数大于乙成绩的平均数
 D. 甲成绩的方差小于乙成绩的方差
5. 某学校从全校学生中随机抽取了 50 名学生作为样本进行数学知识测试,记录他们的成绩,测试卷满分 100 分,将所得数据分成 6 组: $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$, 并整理得到如图所示的频率分布直方图. 图中 t 的值为 _____; 若全校学生参加同样的测试, 估计全校学生的平均成绩为 _____ 分.



【技巧点拨】

(1) 抽样问题的重点是比例分配的分层随机抽样及其相关计算; (2) 统计图表问题, 一是要从中得出有关数字特征, 如中位数、平均数、百分位数、方差等计算, 二是要从图表中发现其反馈出来的信息, 如优劣比较、变化趋势等.

微专题 1 函数的图象与性质

考点要求	考题统计	考情分析
函数的图象与性质	2024 年北京卷第 7 题 2024 年北京卷第 9 题 2023 年北京卷第 4 题 2023 年北京卷第 11 题 2023 年北京卷第 15 题 2022 年北京卷第 7 题 2022 年北京卷第 11 题 2022 年北京卷第 14 题 2021 年北京卷第 3 题	函数的图象与性质 (1)对函数的性质(如单调性、奇偶性、周期性)的考查,其主要载体是指数函数、对数函数和分段函数,多为选填题中的中档题; (2)考查指对运算与指对函数模型,多以中档题出现; (3)考查函数性质的综合运用,此类问题对恒等变形、等价转化的能力要求较高,多为选填题中的压轴题

考法探析 · 明规律

微点 1 函数的概念与表示

- [2024 · 东城一模] 设函数 $f(x) = \frac{1}{\ln x} + 1$, 则 ()
 A. $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$ B. $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$
 C. $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$ D. $f(x) = 2f\left(\frac{1}{x}\right)$
- [2023 · 北京卷] 已知函数 $f(x) = 4^x + \log_2 x$, 则 $f\left(\frac{1}{2}\right) =$.
- [2022 · 北京卷] 函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ 的定义域是 .

微点 2 函数的单调性与奇偶性

例 1 [2023 · 北京卷] 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()

- A. $f(x) = -\ln x$ B. $f(x) = \frac{1}{2^x}$
 C. $f(x) = -\frac{1}{x}$ D. $f(x) = 3^{|x-1|}$

例 2 [2022 · 北京卷] 设函数 $f(x) = \begin{cases} -ax+1, & x < a, \\ (x-2)^2, & x \geq a. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值, 则 a 的一个取值为 _____;
 a 的最大值为 _____.

[听课笔记]

【规律提炼】

判断函数奇偶性、单调性的关键:

- (1) 函数奇偶性、单调性的定义及相关结论(如奇函数 $\times$ 偶函数=奇函数);
 (2) 借助函数的图象, 可以通过图象的平移、伸缩、对称这些变换得到目标函数图象, 注意特殊点的关键作用.

自测题

1. [2024 · 西城一模] 下列函数中, 既是偶函数又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()
 A. $y = x^2 + x$ B. $y = \cos x$
 C. $y = 2^x$ D. $y = \log_2 |x|$
2. [2024 · 顺义一模] 若函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x+1, & x > 0, \end{cases}$ 则“ $x_1 + x_2 > 0$ ”是“ $f(x_1) + f(x_2) > 0$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x+3, & x \leq 2, \\ \log_a x, & x > 2 \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$). 若 $a = \frac{1}{2}$, 则 $f[f(-1)] =$ _____; 若 $f(x)$ 有最小值, 则实数 a 的取值范围是 _____.

微点 3 基本初等函数图象与性质

- 例 3** [2024 · 石景山一模] 设 $a = 2^{0.3}$, $b = \sin \frac{\pi}{12}$, $c = \ln 2$, 则 ()
 A. $c < b < a$ B. $b < c < a$
 C. $a < b < c$ D. $b < a < c$
- 例 4** [2024 · 北京卷] 已知 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 是函数 $y = 2^x$ 的图象上两个不同的点, 则 ()
 A. $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$ B. $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} > \frac{x_1 + x_2}{2}$
 C. $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} < x_1 + x_2$ D. $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} > x_1 + x_2$

[听课笔记]

【规律提炼】

研究基本初等函数图象与性质要特别注意:

(1)指、对函数的底数对函数性质的影响;

(2)一些特殊点和特殊线,如指、对函数的图象恒过的点,渐近线,同底指、对函数图象的对称轴.

自测题

1. [2024·顺义一模] 已知 $a = \log_4 2, b = \left(\frac{1}{2}\right)^e, c = \pi^{\frac{1}{2}}$, 则 ()
- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$
C. $c > b > a$ D. $c > a > b$
2. 已知函数 $f(x) = 3\log_2 x - 2(x-1)$, 则不等式 $f(x) > 0$ 的解集是 ()
- A. $(1, 4)$ B. $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$
C. $(0, 1) \cup (4, +\infty)$ D. $(0, 4)$
3. [2024·北师大实验二模] 已知函数 $f(x) = 2^x$, 若 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 则下列结论错误的是 ()
- A. $f(x_1) < f(x_2)$
B. $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
C. $f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
D. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2)$

微点4 函数模型与应用

- 例5 [2024·北京卷] 生物丰富度指数 $d = \frac{S-1}{\ln N}$ 是河流水质的一个评价指标, 其中 S, N 分别表示河流中的生物种类数与生物个体总数. 生物丰富度指数 d 越大, 水质越好. 如果某河流治理前后的生物种类数 S 没有变化, 生物个体总数由 N_1 变为 N_2 , 生物丰富度指数由 2.1 提高到 3.15, 则 ()
- A. $3N_2 = 2N_1$ B. $2N_2 = 3N_1$
C. $N_2^2 = N_1^3$ D. $N_2^3 = N_1^2$
- 例6 [2023·东城一模] 恩格斯曾经把对数的发明、解析几何的创始和微积分的建立称为十七世纪数学的三大成就, 其中对数的发明, 曾被十八世纪法国大数学家拉普拉斯评价为“用缩短计算时间延长了天文学家的寿命”. 已知正整数 N 的 70 次方是一个 83 位数, 由下面表格中部分对数的近似值(精确到 0.001)可得 N 的值为 ()

M	2	3	7	11	13
$\lg M$	0.301	0.477	0.845	1.041	1.114

- A. 13 B. 14
C. 15 D. 16

【听课笔记】

【规律提炼】

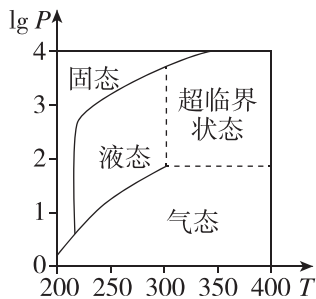
常见函数应用的基本模型是一次、二次、指数、对数、幂函数等模型,注意指数对数的互换以及指数对数的基本运算法则.

自测题

1. [2024·东城二模] 声音是由物体振动产生的,每一个纯音都是由单一简谐运动产生的乐音,其数学模型为 $h(t)=A\sin \omega t(A>0,\omega>0)$,其中 A 表示振幅,响度与振幅有关; T 表示最小正周期, $T=\frac{2\pi}{\omega}$,它是物体振动一次所需的时间; f 表示频率, $f=\frac{1}{T}$,它是物体在单位时间里振动的次数.下表为我国古代五声音阶及其对应的频率 f :

音	宫	商	角	徵	羽
频率 f	262 Hz	293 Hz	330 Hz	349 Hz	392 Hz

- 小明同学利用专业设备,先弹奏五声音阶中的一个音,间隔 $\frac{1}{3}$ 个单位时间后,第二次弹奏同一个音(假设两次声音响度一致,且不受外界阻力影响,声音响度不会减弱),若两次弹奏产生的振动曲线在 $(\frac{1}{3}, +\infty)$ 上重合,根据表格中的数据判断小明弹奏的音是 ()
- A. 宫 B. 商
C. 角 D. 徵
2. [2022·北京卷] 在北京冬奥会上,国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术,为实现绿色冬奥作出了贡献.如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与 T 和 $\lg P$ 的关系,其中 T 表示温度,单位是 K; P 表示压强,单位是 bar. 下列结论中正确的是 ()



- A. 当 $T=220, P=1026$ 时, 二氧化碳处于液态
B. 当 $T=270, P=128$ 时, 二氧化碳处于气态
C. 当 $T=300, P=9987$ 时, 二氧化碳处于超临界状态
D. 当 $T=360, P=729$ 时, 二氧化碳处于超临界状态

微专题 2 导数的基本应用

考点要求	考题统计	考情分析
导数的基本应用	2024年北京卷第20题 2023年北京卷第20题 2022年北京卷第20题 2021年北京卷第19题	导数的考查知识载体主要是三次函数、指数函数、对数函数、三角函数. 主要题型:①利用导数研究函数的单调性、极值与最值问题;②函数零点问题;③函数与不等式综合推理问题

考法探析·明规律

微点1 导数几何意义

- [2023·东城一模] 过坐标原点作曲线 $y=e^{x-2}+1$ 的切线,则切线方程为 ()
A. $y=x$ B. $y=2x$
C. $y=\frac{1}{e^2}x$ D. $y=ex$
- [2024·新课标I卷] 若曲线 $y=e^x+x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线也是曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 的切线,则 $a=$ _____.

微点2 导数与函数的单调性

- 例1** [2023·西城一模] 已知函数 $f(x)=e^x-\cos x$.
- 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;
 - 设 $g(x)=xf'(x)-f(x)$,证明: $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;
 - 判断 $3f\left(\frac{1}{3}\right)$ 与 $4f\left(\frac{1}{4}\right)$ 的大小关系,并加以证明.

【规律提炼】

- 判断原函数的单调性,关键是判断导函数与0的大小关系,可以借助导函数的图象与 x 轴的相对位置关系进行判断.
- 利用函数的单调性比较大小,有时需依据题意构造辅助函数,再利用所构造函数的单调性比较大小.
- 讨论函数的单调性是在函数的定义域内进行的,不要超出定义域的范围.

自测题

[2024·通州二模] 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + x - 1}{e^x}, a \in \mathbf{R}$.

- (1) 当 $a=0$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) 当 $a>0$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (3) 在(2)的条件下, 若对于任意 $x \in [1, 3]$, 不等式 $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{e^2}$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

微点3 导数的极值、最值

例2 [2023·北京卷] 设函数 $f(x) = x - x^3 e^{ax+b}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = -x + 1$.

- (1) 求 a, b 的值;
- (2) 设函数 $g(x) = f'(x)$, 求 $g(x)$ 的单调区间;
- (3) 求 $f(x)$ 的极值点个数.

【规律提炼】

对于函数 $y=f(x)$, 确定极值点的个数的办法大致有两种: 其一, 求出所有的极值点, 即直接求出方程 $f'(x)=0$ 的解; 其二, 设法确定导函数 $y=f'(x)$ 的零点的个数, 此时由函数零点存在定理只能判断在 (a, b) 上图象是一条连续曲线的函数在此区间上至少有一个零点, 为了确定导函数 $y=f'(x)$ 的零点个数, 就必须研究导函数的单调性并结合导函数的极值确定其图象基本形状, 从而确定导函数 $y=f'(x)$ 的零点个数, 并确定函数 $y=f(x)$ 有几个极值点.

自测题

1. [2021·北京卷] 已知函数 $f(x)=\frac{3-2x}{x^2+a}$.

(1) 若 $a=0$, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值, 求 $f(x)$ 的单调区间, 并求其最大值和最小值.

2. [2024·西城二模] 已知函数 $f(x)=4a\sin x+(a^2+1)x^2$, 其中 $a\geqslant 0$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值, 求 a 的值;

(2) 当 $a=1$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上的最大值;

(3) 证明: $f(x)$ 有且只有一个极值点.